Christoph ABLEITINGER, Wien

Biomathematische Modelle ganz diskret

Biomathematik hat sich als Teilgebiet der Mathematik und als wichtiges angewandtes Forschungsfeld längst etabliert. Sie versucht, durch die Modellierung biologischer Systeme, diese besser zu verstehen, Phänomene der belebten Natur zu erklären und Prognosen über zukünftige Verläufe zu gewinnen. Große Erfolge hat die Biomathematik bis dato in der Demographie, der Epidemiologie, der mathematischen Ökologie und nicht zuletzt in der Populationsgenetik feiern können.

Wie schnell breiten sich Seuchen aus und wie kann man sie eindämmen? Warum können Krankheiten vererbt werden und wie groß ist das Risiko, dass das Kind kranker Eltern ebenfalls krank wird? Wer soll später unsere Pensionen zahlen, wenn sich die Altersstruktur in unserer Gesellschaft weiter in Richtung Überalterung verändert? Gerade die Lebensnähe dieser oder ähnlicher Fragen könnte doch auch für Schülerinnen und Schüler interessant sein. Das wichtigste Werkzeug in der Biomathematik sind (Systeme von) Differentialgleichungen. Ein Knock-Out-Kriterium, Biomathematik auch schon im Schulunterricht zu behandeln?

1. Diskrete Modelle als Brücke zur Schulmathematik

Die Antwort müsste wohl „Ja“ lauten, wenn an eine Bearbeitung ausschließlich mittels Differentialgleichungen gedacht wird. Übersetzt man jedoch die kontinuierlichen Modelle in diskrete, also in (Systeme von) Differenzengleichungen, ist eine Bearbeitung sogar schon in der Sekundarstufe I möglich.

Schülerinnen und Schüler kommen erstmals in Klassenstufe 7 mit Differenzengleichungen in Berührung, nämlich bei der Zinseszinsrechnung. Die dort verwendete Rekursion ist jene des exponentiellen Wachstums $N_{t+1} = N_t + r \cdot N_t$, das auch zur Beschreibung der Entwicklung von Bevölkerungsgrößen (zumindest in der Anfangsphase) verwendet werden kann. Sind Rekursionen erst einmal im Unterricht behandelt worden, ist der Weg zu interessanteren und realistischeren Modellen als dem exponentiellen Modell nicht mehr weit. Beispielsweise ist für die Beschreibung des Wachstums einer Bevölkerung das logistische Wachstumsmodell $N_{t+1} = N_t + r \cdot N_t \cdot (K - N_t)$ meist viel besser geeignet. Im Unterricht kann und soll der Fokus gerade auf das Finden geeigneter Rekursionen, also auf das Modellieren gegebener Sachverhalte, Situationen und Beziehungen, und auf die korrekte Interpretation der darin vorkommenden Terme gelegt werden. Das hohe Rechenpensum, das bei der Berechnung einzelner Folgenglieder auftaucht, kann nämlich ohnedies der Computer übernehmen. Und welches Werkzeug bietet sich zur Simulation von Differenzengleichungen besser an, als die Tabellenkalkulation? Auf das didaktische Potenzial dieser Software gehen wir in Abschnitt 3 genauer ein, zunächst betrachten wir ein Beispiel eines biomathematischen Modells.

2. Das Aussterben von Tierpopulationen

Eine zu große Bevölkerungsdichte in einem bestimmten Gebiet ist oftmals kontraproduktiv für das Wachstum einer Tierpopulation. Zu viel Konkurrenz um vorhandene Nahrungsquellen und Brutstätten führt dazu, dass das Wachstum der Population gebremst wird und die Anzahl der Individuen eine bestimmte Kapazitätsgrenze K in diesem Gebiet nicht dauerhaft überschreiten kann. Dieser Sachverhalt wird durch das logistische Modell beschrieben.

Aber auch eine zu geringe Bevölkerungsdichte kann zum Problem für Tierpopulationen werden. Beispielsweise hat man beim Afrikanischen Wildhund beobachtet, dass die Bevölkerungsdichte in manchen Teilen Afrikas schon jetzt zu gering ist, um dauerhaftes Überleben der Gattung sichern zu können. Der Afrikanische Wildhund ist ein Rudeltier, das in Gruppen auf Jagd geht. Haben einzelne Individuen Schwierigkeiten dabei, Jagdpartner zu finden, so verläuft das Ergattern von Beute oftmals erfolglos, was sich natürlich negativ auf ihre Reproduktionsrate niederschlägt.

Auch bei Pflanzen tritt dieser Effekt auf: Je niedriger beispielsweise die Dichte des Deutschen Enzian in einem Gebiet ist, desto kleiner ist die Anzahl der Samen pro Pflanze.

In der Literatur wird dieses Phänomen nach dem amerikanischen Ökologen Warder Clyde Allee als „Allee-Effekt“ bezeichnet. Vereinfacht könnte man sagen, dass eine Population auf lange Zeit gesehen zum Aussterben verdammt ist, wenn ihre Bevölkerungszahl erst einmal unter einen bestimmten Schwellwert gesunken ist.

Diese Beschreibung des Allee-Effekts kann nun als Grundlage für Modellierungstätigkeiten im Schulunterricht herangezogen werden. Ausgehend vom exponentiellen bzw. logistischen Wachstumsmodell können Schülerinnnen und Schüler selbst passende Rekursionsformeln aufstellen, in Tabellenkalkulationen experimentieren, verschiedene Modelle vergleichen und Prognosen abgeben.

Ein (zugegebenermaßen bereits relativ elaboriertes) Modell zur Beschreibung des Allee-Effekts könnte etwa so aussehen: $N_{t+1} = N_t - a \cdot N_t + b \cdot N_t^2 - c \cdot N_t^3$ wobei $a, b, c > 0$. Klarerweise muss so ein

Modell im Schulunterricht motiviert oder besser noch schrittweise aufgebaut und inhaltlich interpretiert werden. Ein didaktisches Konzept dazu findet man in Ableitinger 2008/1, S. 56-63. Wählt man in diesem Modell $a = 0{,}25$, $b = 0{,}0052$ und $c = 0{,}000025$ und lässt man eine Tabellenkalkulation die ersten 60 Zeitschritte berechnen, so erhält man je nach Startwert N_0 unterschiedliche Verläufe der Bevölkerungsentwicklung wie in Abbildung 1. Hier liegt die Kapazitätsgrenze K bei etwa 130, der Schwellwert T bei etwa 75 Individuen. Startet man oberhalb von K, so nimmt die Bevölkerung bis zur Kapazitätsgrenze ab, liegt N_0 zwischen T und K, so wächst die Bevölkerung bis zur Kapazitätsgrenze und sind zu Beginn schon weniger als T Individuen vorhanden, so tritt der Allee-Effekt ein und die Bevölkerung stirbt langfristig aus.

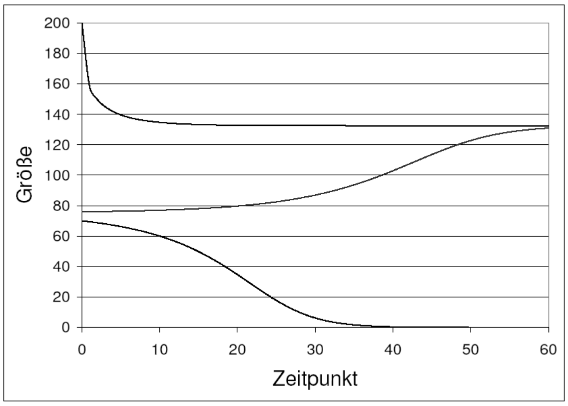

Abbildung1

3. Didaktische Analyse

Tabellenkalkulation: Ohne die Möglichkeiten von Tabellenkalkulationen ist die Bearbeitung diskreter biomathematischer Modelle im Mathematikunterricht der Sek II nur bedingt sinnvoll. Erst durch sie wird der große Rechenaufwand leicht bezwingbar. Ein großer Vorteil gegenüber anderen Softwareprodukten ist zweifellos die einfache Syntax, die den Lernenden meist ohnehin schon vertraut ist. Aus didaktischer Sicht ist „das Bezugnehmen auf die Zelle darüber“ und das haptische „Hinunterziehen von Formeln“ von großer Bedeutung für das Durchschauen und Begreifen von Rekursionen. Im Sinne des operativen Prinzips kann durch Parametervariation (beispielsweise durch Schieberegler) das Objekt „Rekursion“ beweglich gemacht werden.

Iteration: „Eine Iteration ist ein spezieller Algorithmus, bei dem wiederholt „dasselbe getan“ wird“, formulieren Humenberger und Reichel salopp (Humenberger und Reichel 1995, S. 200). Sie ist damit sozusagen eine alltagsnahe Tätigkeit, denn es gibt viele Dinge in unserem Leben, die wir immer und immer wiederholen. Iteration ist aber auch eine der fundamentalen Ideen der Mathematik. Sie kommt in den Curricula der Schulmathematik implizit an vielen Stellen und auf unterschiedlichen Niveaus vor, so etwa bei der Zinseszinsrechnung, bei Wachstumsprozessen, bei der rekursiven Darstellung von linearen Funktionen, beim Thema Folgen und Grenzwerte, bei iterativen Näherungsverfahren und schließlich bei Differenzengleichungen. Die Biomathematik bietet sich hier als möglicher Kontext und somit als Begleiter dieser Idee an.

Systemdenken: Menschen denken häufig in einfachen Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen. Im Sinne der Allgemeinbildung unserer Schülerinnen und Schüler ist es jedoch notwendig, den System- und Netzcharakter realer Situationen und Zusammenhänge auch im Mathematikunterricht miteinzubeziehen. Hier bieten sich Systeme von Differenzengleichungen, wie etwa bei Räuber-Beute-Modellen oder bei einfachen Epidemiemodellen (siehe etwa Ableitinger 2008/2) für ein Kennenlernen bzw. einen ersten Einstieg in eine authentische Arbeit mit komplexen Systemen an. Schon bei solch elementaren Modellen treten Rückkopplungseffekte oder chaotische Phänomene auf, die mit oben erwähntem Ursache-Wirkungs-Denken nicht erklärt werden können. Daraus ergibt sich die Hoffnung, dass die Systemhaftigkeit akuteller Themen wie der Flüchtlingsproblematik, der Umwelt- und Wirtschaftspolitik, der Ausbreitung globaler Epidemien, uvm. von den Lernenden erkannt und zumindest ansatzweise erfasst werden.

Darstellungsformen: Unterschiedliche Darstellungformen sind oftmals Quellen für das Entdecken von Eigenschaften und erweitern den Blick auf den zugrundeliegenden Begriff. Für Rekursionen gibt es eine ganze Reihe von Darstellungsformen, zu nennen sind etwa schematische Darstellungen, die Rekursionsformel, die Tabelle und Zeit- bzw. Phasendiagramme. All diese Darstellungsformen sind in Tabellenkalkulationen präsent, ein Hin- und Herschalten ist ohne großen Aufwand per Mausklick möglich, was den Übersetzungsprozess auch in den Köpfen der Lernenden fördert.

Fächerübergreifend und anwendungsorientiert: Dass realitätsbezogener Mathematikunterricht die Motivation der Lernenden fördern kann, ist vielfach belegt. Biomathematik ist selbstverständlich aus Anwendungen heraus entstanden und zeigt eine Reihe von Anknüpfungspunkten zu aktuellen Themen. Fächerübergreifender Unterricht mit Biologie kann z. B. hinsichtlich der Fachtermini wertvolle Synergien nutzen.

Literatur

Ableitinger, Ch. (2008/1). *Diskrete biomathematische Modelle im Schulunterricht – Chancen aus der Sicht der Mathematikdidaktik*. Dissertation, Universität Wien.

Ableitinger, Ch. (2008/2). Ausbreitung von Epidemien. *Internationale Mathematische Nachrichten, Nr. 209*, S. 29 - 39.

Humenberger, H., Reichel, H.-Ch. (1995). *Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich.